## [**Os números reais: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/01/04/os-numeros-reais-exercicios/)

Publicado o [04/01/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/01/04/os-numeros-reais-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

Vexamos algúns exercicios relacionados con [esta entrada](https://fundmat.wordpress.com/2011/01/05/os-numeros-reais/).

* Determima cales destes conxuntos son contornos do cero: [-1,1], (-1,2), (0,3), [0,+∞), (-1,+∞).
* Determina o conxunto que verifica a desigualdade |1/x|>10.
* Xustifica se as seguintes igualdades son certas ou non:

\displaystyle \frac{1}{n}+\frac{1}{m} = \frac{1}{n+m}.

\displaystyle \text{e}^{x^2}=\left(\text{e}^x\right)^2=\text{e}^{2x}.

2^{-n}3^{-n}=\left(\frac{1}{6}\right)^n.

\displaystyle \text{e}^{-n-1}+\frac{1}{n+1}<\text{e}^{-n}+\frac{1}{n}.

* Determina os conxuntos que verifican as desigualdades:

\displaystyle \frac{2}{3}<\frac{1}{x}<\frac{3}{4}.

\displaystyle \left|\frac{4}{5}x-2\right|>5.

\displaystyle \frac{-x+7}{2}\leq \frac{15+4x}{5}.

\displaystyle \frac{4}{5}(x-4)> \frac{2}{3}(2x-6).

\displaystyle \left|\frac{2}{x}-1\right|> \frac{7}{3}.

* Determina os conxuntos que verifican as ecuacións:

\displaystyle |x-1|=1-x.

\displaystyle |8 -3x| = \frac{5}{2}.

* Demostra que |a\cdot b|=|a||b|, para todo *a* e *b* reais. Pista: considera varios casos, dependendo do signo dos termos.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/10/28/os-numeros-reais-solucions-aos-exercicios/).

## [**Rectas e planos: exercicios de rectas**](https://fundmat.wordpress.com/2012/01/05/os-numeros-reais-exercicios-de-rectas/)

Vexamos algúns exercicios relacionados con [esta entrada](https://fundmat.wordpress.com/2011/01/06/rectas-e-planos/).

* Determima a ecuación xeral da recta que pasa polos puntos P(-3,4) e Q(3,12).
* Ídem da recta que pasa polo punto P(-3,4) e con vector director **v**=(1,-2).
* Ídem da recta que pasa polo punto P(-3,4) e é paralela á recta 3x+2y=0.
* Ídem da recta que pasa polo punto P(-3,4) e é perpendicular a 3x+2y=0.
* Ídem da recta con pendente 1/2 que corta o eixo OY en y=3.
* Se as rectas Ax+By+C=0 e Dx+Ey+F=0 son paralelas, que relación cumpren os coeficientes? E se son perpendiculares?
* Supoñamos que os eixos *OX* e *OY* son os bordes dunha mesa de billar. Un xogador quere introducir unha bola posicionada no (2,2) na tronera ubicada no (0,1), de xeito que rebote no eixo *OX*. En que punto do eixo *OX* debe rebotar a bola? Pista: se a traxectoria segue unha recta de pendente *m*, a bola rebotada transita por unha recta de pendente *-m*.
* Unha vía férrea de montaña ten zonas dunha inclinación do 36%. Nese punto, os asentos dianteiros do vagón están catro metros por riba dos traseiros. Cal é a lonxitude do vagón?

Aquí poder ver as [solucións aos exercicios](https://fundmat.wordpress.com/2020/10/28/rectas-solucions-aos-exercicios/). Tamén podes consultar as [solucións](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/19/exercicios-de-rectas-resoltos/) propostas por alumnos.

## 

## 

## [**Cónicas: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/11/11/conicas-exercicios/)

Publicado o [11/11/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/11/11/conicas-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

* Determina o centro e o radio da circunferencia x^2 + y^2-4x+4y=0.
* Determina o centro e os semieixos da elipse x^2+2y^2-4x=0.
* Determina o vértice e a orientación da parábola \displaystyle y = \frac{1}{2}x^2+x+8.
* A ecuación \displaystyle x^2+2y=4y^2, que tipo de cónica define?
* A distancia entre dous conxuntos defínese coma *a menor das distancias entre os puntos dos dous conxuntos*. No caso da distancia entre unha recta e unha circunferencia, basta con calcular outra recta, *s*, que pase polo centro da circunferencia e sexa pérpendicular á primeira recta; a distancia entre a interseccións de *s* coa circunferencia e a recta orixinal é a cantidade buscada. Deste xeito, calcula a distancia entre a recta 2x+y=5 e a circunferencia (x+1)^2+(y+1)^2=2.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/conicas-solucions-aos-exercicios/).

## [**Funcións: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/11/11/funcions-exercicios/)

* Atopa o dominio e a imaxe das funcións f(x) = x^3+\exp(x) e g(x)= \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.
* Xustifica por que non é certo en xeral que \sqrt(x+y)=\sqrt{x}+\sqrt{y} ou que \exp(x+y)=\exp(x)+\exp(y).
* Xustifica, usando que a exponencial é crecente, se é certo que \exp(-n^2) < \exp(-(n+1)) cando n>1.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/identificacion-de-funcions-solucions-aos-exercicios/).

[**Trigonometría: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/11/11/trigonometria-exercicios/)

Publicado o [11/11/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/11/11/trigonometria-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

* Calcula o seno de 15º, sabendo que 15º=45º-30º.
* Calcula o seno do ángulo que consiste na cuadraxésimo octava parte da circunferencia.
* Calcula o seno de -2π/3 rad, 5π/6 rad e 7π/3 rad.
* Expresa en termos de sin(*x*) e cos(*x*) as expresións cos(3π/2-x) e sin(π/4+x).
* Xustifica se a función *y*=csc(*x*)·tan(*x*) é par ou impar.
* Calcula os valores de (-π,π] para os que \displaystyle \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}.
* Avalía \displaystyle \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) como \displaystyle \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right).
* Usando as fórmulas da suma de ángulos, xustifica:

\displaystyle \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(x).

* Xustifica a fórmula:

\displaystyle \tan(A+B) = \frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\cdot\tan(B)}.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/trigonometria-solucions-aos-exercicios/).

## [**Exercicios de interpolación**](https://fundmat.wordpress.com/2015/09/22/exercicios-de-interpolacion/)

Publicado o [22/09/2015](https://fundmat.wordpress.com/2015/09/22/exercicios-de-interpolacion/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

* Calcula a expresión do polinomio de menor grao que vale 1 en *x=0* e vale 0 en *x = 1,2,3*.
* Sexa R un espazo de polinomios con coeficientes reais definido en Sage. O comando que permite calcular os coeficientes do polinomio do exercicio anterior é:

a) R.lagrange\_polynomial([(0,1), (1,0), (2,0), (3,0)])  
b) R.interpolation([(0,1), (1,0), (2,0), (3,0)])  
c) R.lagrange\_polynomial([0,1,2,3], [1,0,0,0])

* Calcula o polinomio de menor grao que interpola os puntos (-1,-1), (0,0), (1,3).
* Calcula o polinomio que interpola á función *y* = sin(*x*) nos puntos *x*=0, π/2, π; Estima o erro que se comete ao aproximar sin(70º) polo valor do polinomio.
* Calcula o polinomio que interpola á función *y* = exp(*x*) nos puntos *x*=0, 1, 2; Estima o erro que se comete ao aproximar exp(1/2) polo valor do polinomio.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/interpolacion-solucions-aos-exercicios/).

## [**Límites: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/limites-exercicios/)

Publicado o [04/12/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/limites-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

Vexamos algún exercicios que ilustran as técnicas da [entrada anterior](https://fundmat.wordpress.com/2011/11/22/regras-de-calculo-dos-limites/).

* Demostra que non existe o límite \displaystyle \lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}.
* O seguinte límite non presenta indeterminación; calcúlao: \displaystyle \lim_{x\to 0^-}\csc(x).
* Calcula os seguintes límites eliminando factores comúns: \displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+5x+6}, \displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, \displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{3-\sqrt{x^2+5}}, \displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}, \displaystyle \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x}.
* Calcula os seguintes límites no infinito: \displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2-3x+1}{x^4-2}, \displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{8x+1}}{\sqrt{x+1/2}}.
* Calcula os seguintes límites mediante a regra de L’Hôpital: \displaystyle \lim_{x\to 0}x\,\cot(x), \displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{x}\right).
* Calcula o \displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{a^x-cos(ax)}{x} para a>0.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/limites-solucions-aos-exercicios/).

## [**Continuidade: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/continuidade-exercicios/)

Publicado o [04/12/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/continuidade-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

* Acha o conxunto onde a función \displaystyle y = \frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{1-|x|}} é contínua. Ídem para \displaystyle y = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right).
* Acha os puntos de discontinuidade de \displaystyle y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin(x)\right)^{-1}.
* Indica se se pode estender a función *y*=sin(*x*)/*x*² con continuidade ao *x*=0.
* Indica como conseguir que a función \displaystyle y = \frac{\pi/3-\text{asin}(x)}{1/2-\sqrt{1-x^2}} sexa contínua no [0,1]. Pista: no punto *x*=√3/2 a función presenta unha indeterminación.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/continuidade-solucions-aos-exercicios/).

## [**Teorema do valor intermedio: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/teorema-do-valor-medio-para-funcions-continuas-exercicios/)

Publicado o [04/12/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/teorema-do-valor-medio-para-funcions-continuas-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

Demostra que as seguintes funcións teñen a lo menos unha raíz no intervalo dado:

* \displaystyle y = \cos(x) en [-π/3, 5π/3],
* \displaystyle y = \frac{2x^2-1}{1-x^2} en [0, 1],
* \displaystyle y = \frac{1}{x}-\tan(x) en [0, π/2],
* \displaystyle y = x+\sin^2(x) en \mathbb{R}.

Aquí podes consultar as solucións para [a existencia](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/raices-solucions-aos-exercicios/) e para [a unicidade](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/unicidade-de-raices-solucions-aos-exercicios/) de raíces.

## [**Regras de derivación: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/regras-de-derivacion-exercicios/)

Publicado o [04/12/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/04/regras-de-derivacion-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

* Calcula e simplifica as seguintes derivadas:
  1. \displaystyle y = \text{atan}\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right),
  2. \displaystyle y = \log(\log(-2x^3)),
  3. \displaystyle y = (\csc(\theta)+\cot(\theta))^{-1},
  4. \displaystyle y =\sqrt{a^2-x^2}+a\,\text{asin}\left(\frac{x}{a}\right) con a>0 dado.
* Calcula e simplifica a derivada segunda de y=\csc(x).
* Escribe a ecuación da recta normal a y = 6x³-2x-1 no punto (1,3).
* Calcula implícitamente a derivada nas seguintes curvas:
  1. *tan(x²+y²)=y/x,*
  2. *2=\log_a\left(\sin(x)+y\cot^2(x)\right)*,
  3. x^y=y^x.
* Calcula implícitamente a derivada nas seguintes curvas e avalíaas no punto dado:
  1. x^2+xy+y^2=7 no punto (\sqrt{7},0)
  2. \displaystyle y^2=x+\log\left(\frac{y}{x}\right) no punto (1,1)
* Considera a función f_n(x) = a_n\sin(nx)+b_n\cos(nx), con n\in\mathbb{N}. Demostra que f''_n(x)+n^2f_n(x)=0.
* O tempo de resposta dunha cola de procesos ven dado pola ecuación  
  \displaystyle T(c) = 500\left(1-\text{e}^{\displaystyle -0.01c}\right)+3c,  
  onde *c* é a carga de traballo. Esta carga fluctúa ao longo das horas do día seguindo unha relación sinuisodal. Se a derivada da carga de traballo respecto do tempo é  
  \displaystyle \frac{\text{d}c}{\text{d}t}=\frac{2}{15}\cos\left(\frac{2t}{15}\right),  
  cal é a derivada do tempo de resposta da cola, *T*, respecto do tempo *t*?
* Calcula a pendente da hipérbola *x*²+2*xy*–*y*²=1 no puntos onde esta corta o eixo OX.
* Calcula a recta normal a \displaystyle x\sin(2y)=y\cos(2x) no punto \displaystyle \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right).
* Calcula a derivada segunda de x^3+y^3=1.
* Calcula os puntos onde a tanxente á gráfica de y=2x^3-3x^2-12x+20 é paralela á recta y=1-12x.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/regras-de-derivacion-solucions-aos-exercicios/).

## [**Polinomio de Taylor: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/06/polinomio-de-taylor-exercicios/)

Publicado o [06/12/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/06/polinomio-de-taylor-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

* Calcula o polinomio de Taylor de grao 2 do coseno arredor do π/2. Escribe o resto entre o polinomio e a función.
* Calcula o polinomio de Taylor de grao 2 da raíz cadrada arredor do 1. Escribe o resto entre o polinomio e a función.
* Estima o grao do polinomio de Taylor que debes usar para obter unha aproximación de √e con erro menor que 10-4 usando a función y = \text{e}^{2x} e tomando x_0=0. Pista: supón que √e<2.
* Calcula o intervalo *[0,x]* onde o polinomio de Taylor de grao 2 de exp(*-x*) arredor do cero aproxima á función con erro menor que 10-6.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/polinomio-de-taylor-solucions-aos-exercicios/).

## [**Extremos de funcións: exercicios**](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/09/extremos-de-funcions-exercicios/)

Publicado o [09/12/2012](https://fundmat.wordpress.com/2012/12/09/extremos-de-funcions-exercicios/) por [franpena](https://fundmat.wordpress.com/author/franpena/)

* Unha caixa de cartón constrúese recortando dun rectángulo de 12×12 cm catro cadrados nas esquinas de x × x cm. Calcula a caixa de volume máximo.
* Hai que tender un cable entre o cumio de dúas antenas de alturas 20 e 30 m, separadas por 100 m entre sí. O cable debe tocar terra entre elas para obter a enerxía. O cable téndese ben estirado, de xeito que forme liñas rectas. Cal debe ser a posición do punto onde toca a terra para que a lonxitude do cable sexa mínima?
* Calcula as dimensións do triángulo isósceles de área máxima cando o seu perímetro é una constante *P*.
* Calcula as dimensións da sección de cilindro de volume máximo cando a súa área é unha constante *A*.
* Calcula as dimensións do triángulo rectángulo de área máxima cando a súa hiponenusa é unha constante dada.

Aquí podes consultar [as solucións](https://fundmat.wordpress.com/2020/11/05/optimizacion-solucions-aos-exercicios/).

## Exercicios de análise

* Demostra por indución que a suma dos *n* primeiros impares é *n*2.
* Demostra por indución que a suma dos cadrados dos *n* primeiros números naturais é igual a \displaystyle\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.
* Demostra que \displaystyle \mathrm{sen}(2x) = \frac{2\,\mathrm{tan}(x)}{1+\mathrm{tan}^2(x)}.
* Calcula o límite  
  \displaystyle \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h^p}  
  sendo *p* un enteiro positivo arbitrario.
* Calcula o límite  
  \displaystyle \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ \frac{h}{\log h}-0}{h^2}.
* Demostra que a función \displaystyle y = \frac{1}{x}-\tan(x) ten exactamente unha raíz no intervalo [0, π/2].
* Calcula o polinomio de Taylor de grao 2 da raíz cadrada arredor do 1. Escribe o resto entre o polinomio e a función.
* Calcula as dimensións do triángulo rectángulo de área máxima cando a súa hipotenusa é unha constante dada.
* Calcula o polinomio de Taylor de g(x) = \displaystyle \frac{F_0}{\mathrm{sen}(k \, x)} arredor de x_0=\frac{\pi}{2k} de grao 2.